自転車を題材にした小中高校生のための数学の問題の作成

Creating a mathematical problem of bicycle-themed for students

自転車文化センター学芸員　谷田貝一男　　Yatagai Kazuo

１．はじめに

日常生活の中で利用している自転車を題材にした数学・算数の問題を作成したので、本稿はこれを紹介するものである。

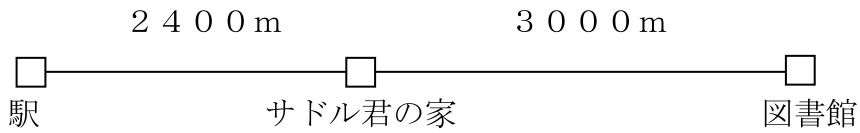
作成に当たっては数学・算数という科目の特徴である問題を読み、図を書き、与えられた条件の相互関係を考え、解答への道筋を書いていくという過程で自転車の持っている特徴や魅力が引き出せることを目標とした。このため、問題ごとに自転車に関するテーマと数学・算数の項目の結びつきを示した。

本稿で作成した問題はあくまでも一例であり、難易度は考慮しなかった。このため、難易度の高いと思われる問題にはヒントを付けた。

２．小学生向け

［問題］

サドル君の家から駅まで２４００ｍ、図書館まで３０００ｍある。サドル君は駅まで歩くと$\frac{2}{3}$時間で、自転車を使うと１０分で到着する。



（問１）

駅まで歩いたときと自転車を使ったときで、到着するまでにかかった時間の差は何分か。

（問２）

図書館まで歩いたときの時間、自転車を使ったときの時間はそれぞれ何分か。

［解答］

（問１）

時間の単位を分でそろえると

$\frac{2}{3}$時間＝６０分×$\frac{2}{3}$＝４０分　　　　したがって　４０分－１０分＝３０分

正解は　　３０分

（問２）

速さと時間は比例するから比の関係を用いると

図書館まで歩いたときは

　２４００ｍ　：　４０分　＝　３０００ｍ　：　□分

　□×２４００＝４０×３０００　　従って　□＝（４０×３０００）÷２４００＝５０

正解は　　５０分

図書館まで自転車を使ったときは

　２４００ｍ　：　１０分　＝　３０００ｍ　：　□分

　□×２４００＝１０×３０００　　従って　□＝（１０×３０００）÷２４００＝１２．５

正解は　　１２．５分＝１２分３０秒

［ねらい］

所要時間の短縮という自転車の利便性と時間の単位の変換・比の使い方を結びつける

３．中学生向け

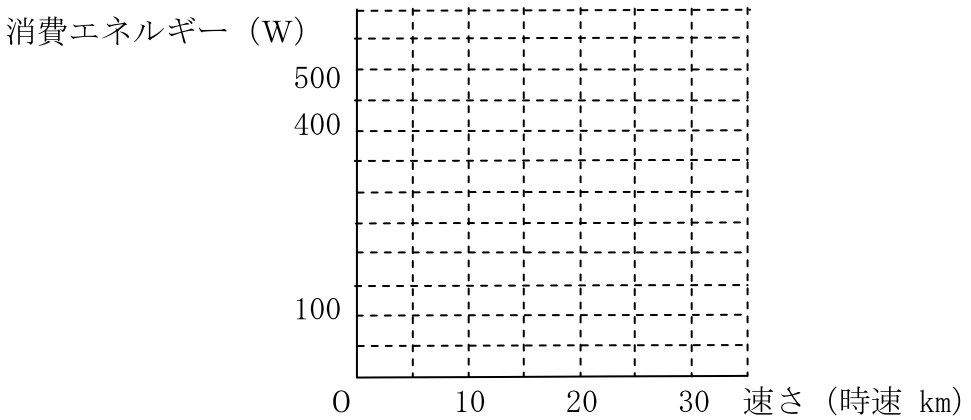
［問題１］（１次関数）

人は毎日食事をとることでエネルギーを補給し、そのエネルギーで体を動かしている。しかし、あまり体を動かさないとエネルギーが体の中にたまっていき、それが原因でさまざまな病気になりやすくなってしまう。そこで、自転車に乗ることでエネルギーを消費することにしする。次の表は体重が５５kg の人が自転車の速さによってどのくらいのエネルギーを消費するかを表したもので、速さＸ（毎時 km）と１分間に消費するエネルギーｙ（W）は１次関数で表される。（心臓などを動かすために必要なエネルギーも含んでいるので時速０km でも消費エネルギーは０Ｗにはならない）

自転車の速さ	（Ｘ）（時速 km）	５	２０
消費エネルギー	（ｙ）　（W）	２０５	４９０

（問１）

上表をもとにして右にそのグラフを書きなさい。



（問２）

書いたグラフを表す式を求めなさい。

（問３）

問２で求めた式を使って時速１２km のときの１分間における消費エネルギーを求めなさい。

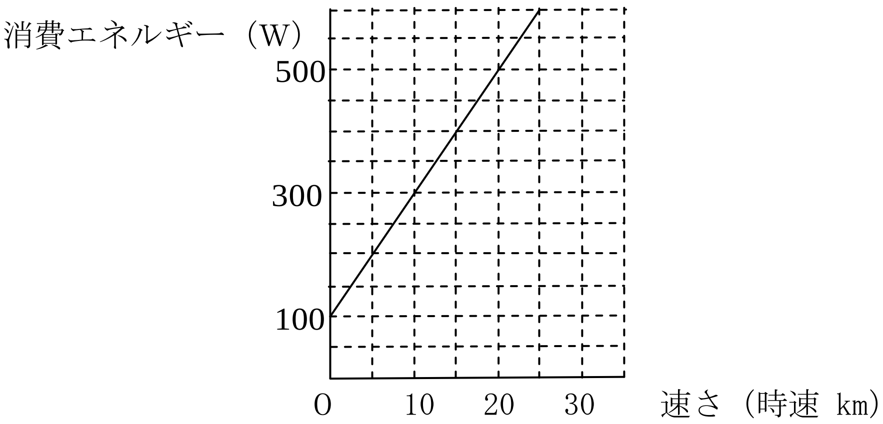
（問４）

中学生が１回の食事でとるエネルギーを４５０００Ｗとする。体重５５kg の人がこれと同じエネルギーをすべて自転車に乗って時速１０km の速さで走って消費するためには何時間走る必要があるか。

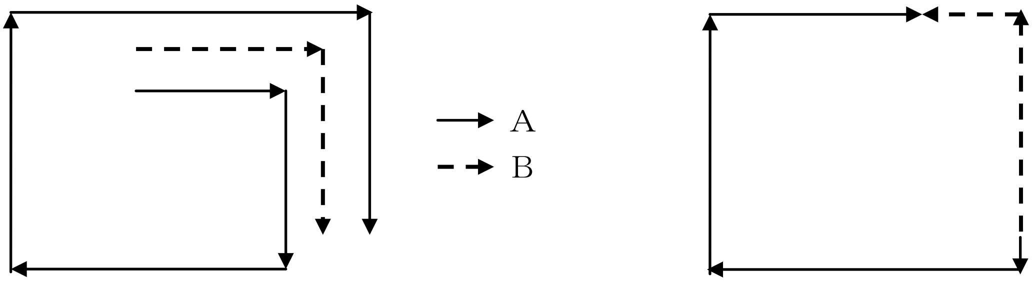
［解答］

（問１）

右のとおり



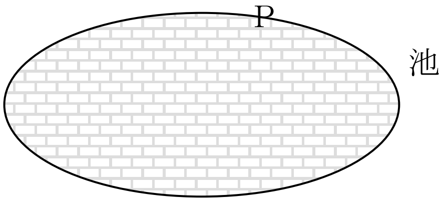
（問２）
１次関数だからｙ＝ａＸ＋ｂに代入する
　　２０５＝５ａ＋ｂ　　　４９０＝２０ａ＋ｂ
連立方程式を解くと　　ａ＝１９　　ｂ＝１１０
正解は　　ｙ＝１９Ｘ＋１１０
（問３）
ｙ＝１９Ｘ＋１１０　にＸ＝１２を代入　　ｙ＝３３８
正解は　３３８Ｗ
（問４）
ｙ＝１９Ｘ＋１１０　にＸ＝１０を代入　　ｙ＝３００
つまり１分間で３００Ｗを消費するから　　４５０００÷３００＝１５０
１５０分＝２時間３０分だから
正解は　２時間３０分
［ねらい］
自転車による運動でエネルギーが消費され健康に良いことと、１次関数とを結びつける

［問題２］（連立方程式）
湖の周りに１周６㎞の道がある。この道を、Ａさんは自転車で、Ｂさんは徒歩でまわることにした。同じ地点から同じ方向へ同時に出発したところ、４０分後に、Ａさんは１周してきてＢさんに追いついた。追いついた地点から、今後は互いに反対の方向へ向かって出発したところ、２４分後に２人は再び出会った。２人の速さをそれぞれ分速で求めなさい。
［解答］
Ａさんの速さを分速Ｘｍ、Ｂさんの速さを分速ｙｍとする。
２人の移動と位置関係は次の通りとなる。
同じ方向に進んだとき　　　　反対方向に進んだとき


（Ａの進んだ距離）と（Ｂの進んだ距離）の差が１周であり、４０分間にＡが進んだ距離は４０Ｘで、４０分間にＢが進んだ距離は４０ｙだから
　　４０Ｘ－４０ｙ＝６０００……①
（Ａの進んだ距離）と（Ｂの進んだ距離）の和が１周であり、２４分間にＡが進んだ距離は２４Ｘで、２４分間にＢが進んだ距離は２４ｙだから
　　２４Ｘ＋２４ｙ＝６０００……②
①÷４０より　　Ｘ－ｙ＝１５０……①’
②÷２４より　　Ｘ＋ｙ＝２５０……②’
②’－①’より　　２ｙ＝１００　　ｙ＝５０　　よってＸ＝２００
正解は　Ａが分速２００ｍ、Ｂが分速５０ｍ
［ねらい］
自転車の速さの違いと進む距離の違いについて連立方程式と結びつける

［問題３］（連立方程式）

１周２ｋｍの池の周りをＡさんとＢさんが自転車に乗って走った。速さはＡさんが時速Ｘｋｍ、Ｂさんは時速１０ｋｍである。
いま、Ｐ地点を２人が同じ方向に向かって同時に出発したら、Ｂさんはｙ分後に１周してきたＡさんに追いつかれた。
また、Ｐ地点を２人が互いに反対の方向に同時に出発したら、２人は５分後に出会った。



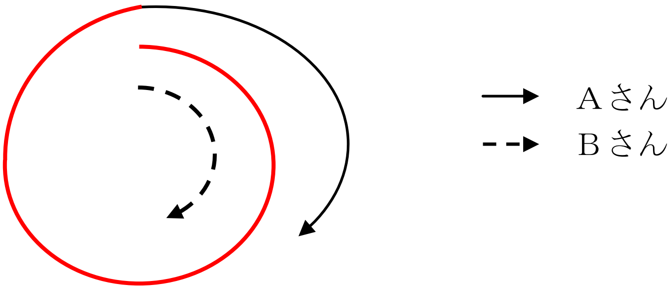
（問１）
Ａさんの時速を求めなさい。
（問２）
２人が同じ方向に走ったとき、ＢさんがＡさんに追いつかれるまでの時間を求めなさい。

［ヒント］

２人が同じ方向に進んだとき
　　ＢさんがＡさんに追いつかれるまでに２人が進んだ距離の差が何を表わしているか
２人が反対の方向に進んだとき
　　ＡさんとＢさんが出会うまでに２人が進んだ距離の和が何を表しているか
上記の２つの関係をＸやｙを用いて表し、連立方程式として解く

［解答］

２人が同じ方向に進んだとき
ＢさんがＡさんに追いつかれたとき、ＡさんはＢよりも池１周分（下図の赤線部分）多く走った



速さが時速だから時間の単位を時間の単位に直す

$$y\text{分} = y \div 6\text{時間} = \frac{y}{60}\text{時間}$$

ＡさんとＢさんが進んだ距離を求める

$$\text{Ａさんが進んだ距離} = \text{Ａさんの速さ} \times \text{Ａさんが走っていた時間} = X \times \frac{y}{60} = \frac{Xy}{60}$$

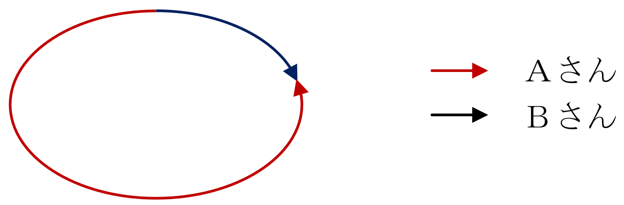
$$\text{Ｂさんが進んだ距離} = \text{Ｂさんの速さ} \times \text{Ｂさんが走っていた時間} = 10 \times \frac{y}{60} = \frac{10y}{60}$$

Ａさんが進んだ距離とＢさんが進んだ距離の差が池１周の距離となるから

$$\frac{Xy}{60} - \frac{10y}{60} = 2 \quad \cdots\cdots①$$

２人が反対の方向に進んだとき

２人が進んだ距離の合計が池１周分（下図の茶色線と青色線）になる



同様に　　5分＝5÷60時間＝$\frac{1}{12}$時間

　Aさんが進んだ距離＝$X \times \frac{1}{12} = \frac{X}{12}$

　Bさんが進んだ距離＝$10 \times \frac{1}{12} = \frac{10}{12}$

したがって　　$\frac{X}{12} + \frac{10}{12} = 2$……②

（問１）

②の方程式を解くと　　$\frac{X}{12} = 2 - \frac{10}{12}$　　両辺を１２倍すると　　$X = 24 - 10 = 14$

正解は　時速１４ｋｍ

（問２）

X＝１４を①の方程式に代入すると　　$\frac{14y}{60} - \frac{10y}{60} = 2$　　　$\frac{4y}{60} = 2$

両辺を６０倍すると　　$4y = 120$　　両辺を４で割ると　　$y = 30$

正解は　３０分

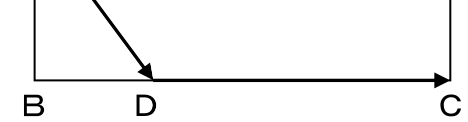
［ねらい］

自転車の速さと走行距離と速さから要する時間が連立方程式から求められることとサイクリングに出かけようという魅力を結びつける

４．高校生向け

［問題１］（微分）

下図のような縦３００ｍ、横１０００ｍの長方形をしたグランドがある。ある人がA地点から折りたたみ式の小型自転車を乗らないで押しながらBCのライン上のD地点まで分速１００ｍで進み、D地点に着いたらこの自転車に乗って毎分２００ｍの速さでC地点まで進むとする。このとき、最短時間でC地点に到着するためには、D地点をBから何ｍの距離にすればよいか。



［解答］

BD＝Xｍとする。$AD = \sqrt{300^2 + X^2}$　　$DC = 1000 - X$より

到着するまでの時間をｆ（X）とすると、

$$f(X)=\frac{\sqrt{300^2+X^2}}{100}+\frac{1000-X}{200} \qquad f`(X)=\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2X}{\sqrt{300^2+X^2}}-\frac{1}{200}$$

$f`(X)=0$で、$X=100\sqrt{3}$

$0\leqq X\leqq 1000$で増減表を書くと

X	0	$100\sqrt{3}$	1000
f`(X)	−	0	＋
f(X)	↘	極小＝最小	↗

正解は　$100\sqrt{3}$ｍの地点

［ねらい］
自転車と歩行の組み合わせの効率性と微分を結びつける

［問題２］（三角関数）
自転車の最後部に図１のような直角二等辺三角形ＡＢＣのリフレクタ（反射板）が付いている。ここに光を当てると反射の法則により入射光線と反射光線は面ＡＢの法線ＤＦとなす角が同一で∠ＧＥＤ＝∠ＨＥＤとなる。
この自転車の後方ＥＬ＝２０ｍのところに自動車がいて、この自動車から発するライトＬの光が自転車のリフレクタに当たって反射している。今、この反射した光が図２のようにライトＬの真横１ｍのところにいる自動車の運転手Mに当たるようにするにはリフレクタの角ＣＢＡを何度にすればよいか、下記の表を用いて求めなさい。

ただし、$\sqrt{404}=20.1$とし、目の高さは考えないとする。

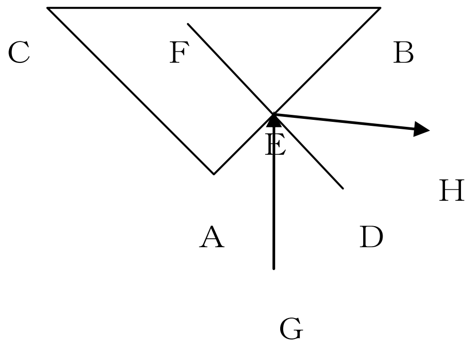


図１

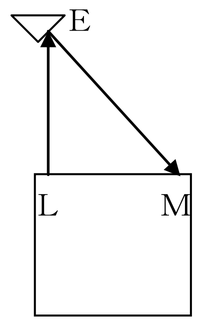


図２

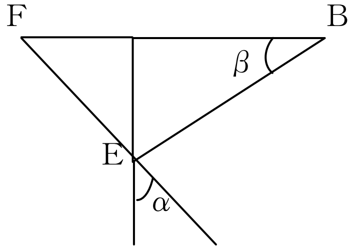
	sin	cos	tan
1°	0.02	0.99	0.02
2°	0.03	0.98	0.03
3°	0.05	0.97	0.05
4°	0.07	0.96	0.07
5°	0.09	0.95	0.09

［解答］
∠ＧＥＤ＝∠ＨＥＤ＝α　　∠ＣＢＡ＝βとする。
◿ＥＬＭで∠ＬＥＭ＝∠ＧＥＤ＋∠ＨＥＤ＝２αから

$\tan 2\alpha = \frac{1}{20}$ より　　$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{1}{20}$ だから

$\tan^2\alpha + 20\tan\alpha - 1 = 0$　　$\tan\alpha > 0$ より　　$\tan\alpha = \frac{-20+\sqrt{404}}{2} = 0.05$

表より　$\alpha = 3°$



左図より　$\alpha = \beta$　だから
$\angle CBA = 3°$

正解は　3°

［ねらい］
自転車のライトの目的と三角関数を結びつける

［問題３］（微分積分）
ＢＭＸではランプと呼ばれる曲面（図１）を登り降りする競技がある。今、この曲面を半径６ｍ、中心を原点とする円の $\frac{3}{2}\pi \sim \frac{5}{3}\pi$ の円弧の範囲とする（以下角度はすべて弧度法とする）（図２）。

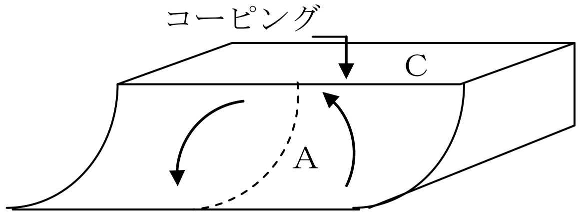


図１

☜横から見ると図２になる

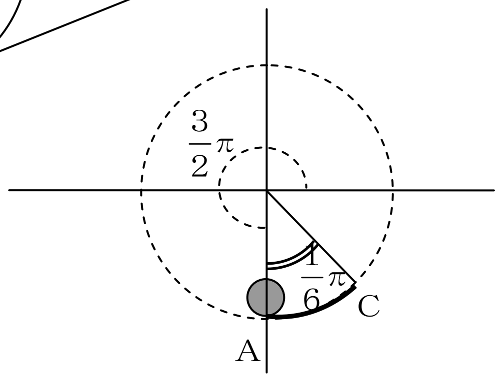
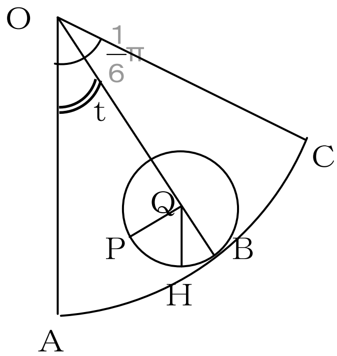


図２

このランプに半径 $\frac{3}{10}$ ｍ、中心をＱとする前車輪をもった自転車（２６インチ）がコーピングに垂直に前車輪が曲面をすべらずに回転しながら登っていく。
前車輪が停止しているときランプ上の点Ａ（０，－６）で接していたが、ランプを登り時刻ｔにおいて点Ｂ（$6\sin t, -6\cos t$）で接していた（図３）。

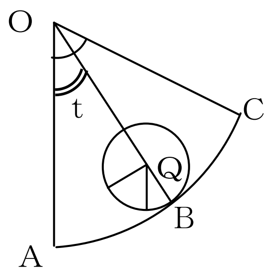


（問題１）
停止していた（時刻ｔ＝０）とき点Ａにあった前車輪の周上の点Ｐの時刻ｔにおける座標（Ｘ，ｙ）をｔを用いて表しなさい。
（問題２）
前車輪が点Ａから点Ｃまで登ったとき（ｔ＝０からｔ＝$\dfrac{5}{3}\pi$まで)、点Ｐの描く曲線の長さを求めなさい。

［ヒント］
（問１）
①点Ｑの座標を求める
②弧ＡＢ＝弧ＰＢより　ＯＡ//ＱＨとし、∠ＰＱＨをｔを用いて表す
③線分ＰＱの長さを利用してＰの座標を求める
（問２）
曲線の長さℓをｔを用いて求める公式は

$$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

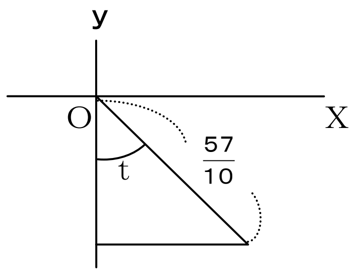
［解答］
（問１）
①点Ｑの座標を求める



上図でＯＡ＝ＯＢ＝曲面の半径＝６

$QB=$前車輪の半径$=\dfrac{3}{10}$　　だから

$OQ=OB-QB=6-\dfrac{3}{10}=\dfrac{57}{10}$

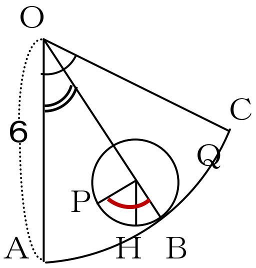


右図より　$QH=\dfrac{57}{10}\sin t$　　$OH=\dfrac{57}{10}\cos t$

Ｑは第３象限にあるから

正解のＱの座標は　$\left(\dfrac{57}{10}\sin t,\ -\dfrac{57}{10}\cos t\right)$

②∠ＰＱＨをｔを用いて表す



ＯＡは曲面の半径だから長さは６　∠ＡＯＢ＝ｔ
したがって弧ＡＢ＝６ｔ＝弧ＰＢ‥‥㋐
右図で、∠ＰＱＢ＝Θ　　とする

ＰＱは前車輪の半径だから長さは$\dfrac{3}{10}$　　したがって弧$PB=\dfrac{3}{10}\Theta$‥‥㋑

㋐と㋑より　　$\dfrac{3}{10}\Theta=6t$　　$\Theta=20t$

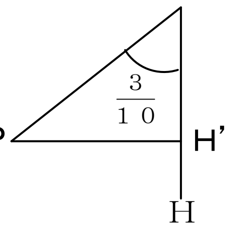
ＯＡ//ＱＨより、∠ＨＱＢ＝ｔ

だから　∠ＰＱＨ＝∠ＰＱＢ－∠ＨＱＢ＝Θ－ｔ＝２０ｔ－ｔ＝１９ｔ

③線分ＰＱの長さを求める　　Ｑ

右図で　$PH' = \dfrac{3}{10}\sin 19t$

$QH' = \dfrac{3}{10}\cos 19t$



④点Ｐの座標を求める

点ＰのＸ座標＝点ＱのＸ座標－線分ＰＨ’$= \dfrac{57}{10}\sin t - \dfrac{3}{10}\sin 19t$

点Ｐのｙ座標＝点Ｑのｙ座標－線分ＱＨ’$= -\dfrac{57}{10}\cos t - \dfrac{3}{10}\cos 19t$

正解は　$\left(\dfrac{57}{10}\sin t - \dfrac{3}{10}\sin 19t\ ,\quad -\dfrac{57}{10}\cos t - \dfrac{3}{10}\cos 19t\right)$

（問２）

①$\dfrac{dX}{dt}$、$\dfrac{dy}{dt}$を求める

$\dfrac{57}{10}\sin t - \dfrac{3}{10}\sin 19t = f(X)$　　$-\dfrac{57}{10}\cos t - \dfrac{3}{10}\cos 19t$

$= f(y)$　とおく

$f'(X) = \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{57}{10}\cos t - \dfrac{3}{10}\cdot 19\cdot\cos 19t$

$= \dfrac{57}{10}\cos t - \dfrac{57}{10}\cos 19t$

$f'(y) = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{57}{10}\sin t + \dfrac{3}{10}\cdot 19\cdot\sin 19t$

$= \dfrac{57}{10}\sin t + \dfrac{57}{10}\sin 19t$

②$\left(\dfrac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$を求める

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 = \left(\frac{57}{10}\cos t - \frac{57}{10}\cos 19t\right)^2$$

$$= \left(\frac{57}{10}\right)^2\cos^2 t + \left(\frac{57}{10}\right)^2\cos^2 19t - 2\left(\frac{57}{10}\right)^2\cos t\cos 19t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{57}{10}\sin t - \frac{57}{10}\sin 19t\right)^2$$

$$= \left(\frac{57}{10}\right)^2\sin^2 t + \left(\frac{57}{10}\right)^2\sin^2 19t - 2\left(\frac{57}{10}\right)^2\sin t\sin 19t$$

したがって

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(\frac{57}{10}\right)^2+\left(\frac{57}{10}\right)^2-2\left(\frac{57}{10}\right)^2(\cos t\cos 19t$$
$$-\sin t\sin 19t)$$

ここで余弦の２倍角の定理の逆を用いて　$(\cos t\cos 19t-\sin t\sin 19t)$を簡単にすると

$(\cos t\cos 19t-\sin t\sin 19t)=\cos(t+19t)=\cos 20t$

ゆえに

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2\left(\frac{57}{10}\right)^2-2\left(\frac{57}{10}\right)^2\cos 20t=2\left(\frac{57}{10}\right)^2(1-\cos 20t)$$

またここで下式の余弦の２倍角の定理を用いて　$(1-\cos 20t)$を簡単にすると

$\cos 2\Theta=1-2\sin^2\Theta$より　　$2\sin^2\Theta=1-\cos 2\Theta$　　だから

$1-\cos 20t=1-\cos 2\cdot 10t=2\sin^2 10t$

結果的に

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2\left(\frac{57}{10}\right)^2\cdot 2\sin^2 10t=\left\{2\left(\frac{57}{10}\right)\sin 10t\right\}^2$$

③曲線の長さを求める

曲線の長さℓをｔを用いて求める公式　　$\ell=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$　に当てはめると

$$\ell=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{\left\{2\left(\frac{57}{10}\right)\sin 10t\right\}^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{2\left(\frac{57}{10}\right)\sin 10t}\,dt=\frac{57}{5}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 10t\,dt$$

$$=\frac{57}{5}\left[-\frac{1}{10}\cos 10t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{57}{5}\left\{-\frac{1}{10}\cos\frac{5}{3}\pi+\frac{1}{10}\cos 0\right\}=\frac{57}{5}\left(-\frac{1}{10}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{10}\right)=\frac{57}{50}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

正解は　$\frac{57}{50}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$m

［ねらい］

ＢＭＸという自転車競技の広報と微分積分を結びつける